УДК 519-7

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАБОТЫ С ПЕРЕСТАНОВКАМИ

© А.А. Груздев

Аннотация. Рассмотрены представление перестановок в памяти ЭВМ и алгоритмы действий с перестановками. Описан класс перестановок в системе компьютерной алгебры Math Partner.

Ключевые слова: перестановка; циклическая перестановка; матрица перестановок; система компьютерной алгебры Math Partner

Перестановки применяются в матричных алгоритмах, где требуется умножение на матрицы перестановок. Если программно реализовать методы действий с перестановками, то трудоемкое умножение матриц больших порядков на матрицы перестановок можно заменить перестановками ее элементов.

Перестановкой называется биективное отображение конечного множества Ω на себя [1]. Перестановка записывается в виде двух строк, в первой строке – элементы множества, во второй строке – те элементы, в которые переходит соответствующий элемент. Пример перестановок приведен на рис. 1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Пример перестановки

Для представления перестановок в системе компьютерной алгебры Math Partner[1] [2] разработан класс Spermutation. В классе определены 2 поля:

1) **MatrixS P** – элементарная матрица перестановки;
2) **int[] ar** – массив – вторая строка в представлении перестановки.

[1] Система компьютерной алгебры Math Partner. URL: http://mathpar.cloud.unihub.ru/ru/ (дата обращения: 07.04.2019).

Для создания объектов типа SPermutation реализованы следующие конструкторы.

1. Конструктор, создающий единичную перестановку: **Spermutation(int n).**

2. Конструктор, создающий перестановку по заданной второй строке представления перестановки: **SPermutation(int[] a).**

3. Конструктор, создающий перестановку по ее представлению в виде матрицы перестановок: **SPermutation(MatrixS A)**.

В классе Spermutation реализованы следующие алгоритмы действий с перестановками.

I. Умножение перестановок.

Перестановки являются отображениями. Поэтому естественно перемножать их в соответствии с определением суперпозиции отображений.

Умножение перестановок обладает следующими свойствами:

1) умножение ассоциативно;

2) существует единичная перестановка e, такая, что для любой перестановки π справедливо: $\pi e = e\pi = \pi$;

3) для каждой перестановки π существует обратная π^{-1}, то есть $\pi\cdot\pi^{-1} = \pi^{-1}\cdot\pi = e$.

Пример умножения перестановок π и σ из примера 1 приведен на рис. 2.

$$\sigma\cdot\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\pi\cdot\sigma = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рис. 2. Пример умножения перестановок

Умножение перестановок программно реализовано в методе SPermutation **multiplyPermutation** (Spermutation a, Ring ring).

Пример работы метода **multiplyPermutation** показан на рис. 3.

$$\text{Input: } Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 9 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Output: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Рис. 3. Пример работы метода **multiplyPermutation**

II. Возведение в целую степень.

Рассмотренная операция умножения позволяет ввести понятие целой степени перестановки (рис. 4).

$$\pi^s = \begin{cases} \pi \cdot \pi^{S-1}, \text{ если } s > 0, \\ \pi^{-1} \cdot \pi^{S+1}, \text{ если } s < 0, \\ e, \text{ если } s = 0. \end{cases}$$

Рис. 4. Определение целой степени перестановки

Метод, выполняющий возведение перестановки в степень: SPermutation **pow**(int n, Ring ring). Пример работы метода **pow** показан на рис. 5.

III. Вычисление обратной перестановки реализовано в методе SPermutation **reversePermutation**(Ring ring).

IV. Вычисление количества инверсий реализовано в методе int **numberOfInversion**() .

V. Определение четности перестановки реализовано в методе boolean **parity**() .

VI. Представление перестановки в циклическом виде.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Пример работы метода **pow**

Наиболее простой и удобной для исследования является циклическая перестановка. Рассмотрим следующий пример. Пусть задана перестановка τ (рис. 6).

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 6. Перестановка τ

Запишем τ в виде $1\to4$, $4\to6$, $6\to2$, $2\to5$, $5\to3$, $3\to1$, $7\to7$.

Если забыть о «неизменяемом» числе 7, то каждое из оставшихся чисел при достаточном повторении перестановки «переходит» во всякое другое число. Возьмем любое из них, например 2. Имеем

$$1=\tau^3(3),\ 2=\tau^6(2),\ 3=\tau^2(2),\ 4=\tau^4(2),\ 5=\tau(2),\ 6=\tau^5(2).$$

Кратко перестановку записывают в виде (1 4 6 2 5 3), опуская «неизменяемое» число 7.

Определение. Элемент называется ***действительно перемещаемым*** перестановкой π, если $\pi(i)\neq i$.

Определение. Перестановка τ называется ***циклом***, если для любых i, j, которые являются действительно перемещаемыми, найдется такая степень k, что $\tau^k(i)=j$. Длиной q цикла называется количество действительно перемещаемых элементов. Цикл τ длины q можно записывать в виде $\tau = (i\pi(i)\pi^2(i)...\pi^{q-1}(i))$.

Рассмотрим еще один пример. Перестановка π задана на рис. 7.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 7. Перестановка π

Перестановка π не является циклической. Запишем ее в виде 1→3, 3→5, 5→7, 7→1, 4→8, 8→6, 6→4, 2→2. Таким образом, эту перестановку можно представить в виде произведения независимых циклов, то есть циклов, не имеющих общих перемещаемых элементов: π = (1 3 5 7) × × (4 8 6) = (4 8 6) · (1 3 5 7).

Теорема 1. ***Любая перестановка π единственным образом представима произведением независимых циклов длины, большей или равной двух (с точностью до порядка сомножителей).***

Алгоритм, выполняющий представление перестановки в циклическом виде, реализован с помощью метода public int[][] **cycle**().

VII. Элементарная матрица перестановок.

Матрица перестановок – квадратная бинарная матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой находится лишь одна единица. Если матрица перестановок P получена из единичной матрицы E перестановкой местами двух строк (или двух столбцов), то такая матрица называется элементарной матрицей перестановок.

Каждая матрица перестановки размера $n \times n$ является матричным представлением перестановки порядка n.

Пусть дана перестановка порядка n (рис. 8).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \delta(1) & \delta(2) & \dots & \delta(n) \end{pmatrix}$$

Рис. 8. Пример

Соответствующей матрицей перестановки является матрица размерности $n \times n$ вида, представленного на рис. 9, где e_i – двоичный вектор длины n, i-й элемент которого равен единице, а остальные равны нулю.

$$P_\delta = \begin{pmatrix} e_{\delta(1)} \\ e_{\delta(2)} \\ \vdots \\ e_{\delta(n)} \end{pmatrix}$$

Рис. 9. Матрица перестановки

Пример. Пусть дана перестановка π, изображенная на рис. 10.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 10. Перестановка π

В матрице для π в первом столбце единица будет стоять на первом месте, во втором столбце – на третьем месте, в третьем – на втором месте (рис. 11).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 11. Матрица перестановок для перестановки π

В классе Spermutation программно реализованы методы построения элементарной матрицы перестановки по заданной перестановке **arrToMatrix** и построения перестановки по матрице перестановок.

Метод arrToMatrix заполняет поле P по имеющемуся массиву arr: void **arrToMatrix**(Ring r). Пример работы метода arrToMatrix показан на рис. 12.

$$\text{Input:}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}.\text{Output:}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Рис. 12. Пример работы метода **arrToMatrix**

Метод matrixToArr заполняет массив arr по имеющемуся полю P: void **matrixToArr**(Ring r). Пример работы метода matrixToArr показан на рис. 13.

$$\text{Input:}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\ \text{Output:}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Рис. 13. Пример работы метода **matrixToArr**

В работе получены алгоритмы и написаны программы на языке Java для выполнения действий с перестановками – их умножения, возведения в степень, вычисления количества инверсий. Кроме того, получены алгоритмы и программы для представления матриц перестановок в виде обычных и циклических перестановок и наоборот. Эти программы позволяют трудоемкое умножение матриц больших порядков заменить на действия с перестановками. В дальнейшем планируется разработка

Web-сервиса для работы с перестановками и добавление его в онлайн-сервис Math Partner[2].

Список литературы

1. *Булгаков А.И, Васильев В.В., Жуковский Е.С.* Алгебра. Ч. 1. Тамбов: Изд. дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2008.
2. *Малашонок Г.И.* Руководство по языку «MATHPAR». Тамбов: Изд. дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2013.

Поступила в редакцию 11.04.2019 г.
Отрецензирована 24.04.2019 г.
Принята в печать 14.05.2019 г.

Информация об авторе:
Груздев Алексей Андреевич – студент института математики, естествознания и информационных технологий. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: aleksandr06_80@mail.ru

THE PROGRAM COMPLEX FOR WORKING WITH PERMUTATIONS

Gruzdev A.A., Student of Institute of Mathematics, Natural Science and Information Technologies. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: aleksandr06_80@mail.ru

Abstract. We consider the permutations representation in the computer memory and actions algorithms with permutations. We describe the permutations class in the computer algebra system Math Partner.

Keywords: permutation; cyclic permutation; permutation matrix; Math Partner computer algebra system

Received 11 April 2019
Reviewed 24 April 2019
Accepted for press 14 May 2019

[2] Система компьютерной алгебры Math Partner. URL: http://mathpar.cloud.unihub.ru/ru/ (дата обращения: 07.04.2019).